

不分明化拓扑线性空间(II)

邱道文

广东工业大学数理系, 广州, 510090

摘要 给出了不分明化拓扑线性空间中有界性、完全有界性和紧性的概念, 得到了其紧性的刻画定理, 即紧性的充要条件是全有界和完备的.

关键词 不分明化线性拓扑; 完全有界; 紧性

中图资料法分类号 O189.1; O141.1

引言

紧性是很重要的概念, 也是线性拓扑中重要概念之一. 因此自1965年模糊集^[1]被提出之后, 人们对 F 拓扑和 LF 拓扑中的紧性做了大量工作(见文[2]第六章). 不分明化拓扑中有限复盖式紧性定义^[3]可得到许多紧性的等价刻画和重要性质. 模糊拓扑线性空间中有界性问题已被吴从宏、方锦喧^[4]所讨论. 本文是文[5]的继续, 给出了不分明化拓扑线性空间中(完全)有界性和紧性^[6]的有关性质, 得到了紧性的刻画定理2.2.

文中有关术语和性质见文[3]和[5], 为查阅方便, 先列出几个所用到的已知定义和结果:

定义1^[3] 设 Σ 是不分明化拓扑空间族, 一元不分明谓词 $\Gamma \in \mathcal{F}(\Sigma)$ 称为紧的, 若

$$\Gamma(X, \mathcal{A}) = (\forall \mathcal{A}(K_0(X, \mathcal{A}) \rightarrow (\exists \mathcal{D}(\mathcal{D} \leq \mathcal{A} \wedge K(\mathcal{D}, X)) \wedge FF(\mathcal{D}))),$$

其中, $FF(\tilde{A}) = (\exists(\tilde{B})(F(\tilde{B}) \wedge ((\tilde{A} \equiv (\tilde{B})), F(\tilde{B}))$ 表示 $\text{supp} \tilde{B}$ 为有限元.

定理2^[3] 设 $(X, \mathcal{A})$ 是不分明化拓扑空间, 则 $\Gamma(X, \mathcal{A}) \leftrightarrow (\forall S)(S \in N(X) \rightarrow (\exists T)(\exists x)((T < S) \wedge (x \in X) \wedge (T \triangleright x)))$, 其中 $N(X) = \{S: S: D \rightarrow X, (D, <) \text{ 为定向集}, T < S \text{ 表示 } T \text{ 为 } S \text{ 的子网}, T \triangleright x \text{ 在下文定义1.1说明}.$

若 $A \subset X$, 则

$$\Gamma(A) \leftrightarrow (\forall S)(S \in N(A) \rightarrow (\exists T)(\exists x)((T < S) \wedge (x \in A) \wedge (T \triangleright x))).$$

定理3^[5] 设 $(X, \mathcal{A})$ 是 fHs (不分明化拓扑线性空间、数域为 K , 下同), 则存在 O 点不分明化邻域系的邻域基 $\mathcal{B}$ 满足:

$$\textcircled{1} \text{ 任意 } V \subset X, V \in \mathcal{B} \Rightarrow A(V) \wedge B(V),$$

$$\text{其中 } A(V) = (\forall x \in X)(\exists \varphi \in k((x \in \varphi V) \wedge (|\varphi| > 0)), \\ B(V) = (\forall \varphi \in K)(|\varphi| \leq 1 \rightarrow \varphi V \subset V).$$

$$\textcircled{2} \Gamma((\forall V \subset X)(V \in \mathcal{B} \rightarrow (\exists U)((U + U \subset V) \wedge (U \in \mathcal{B}))).$$

1 有界与完全有界

定义1.1 设 $(X, \mathcal{A})$ 是 fHs , 二元不分明谓词 $\triangleright \in \mathcal{A}N(X) \times X$ 定义为:

收稿日期: 1997-05-21 邱道文 男 30岁 讲师

$S \triangleright X = (\forall V \in \mathcal{X})(V \in N_x \rightarrow S \subseteq V) \subseteq V$ 表示存在 $\alpha \in D$, 对一切 $\beta \triangleright \alpha$ 有 $S(\beta) \in V$;
 $\mathcal{X} = \{V \subseteq X: N_x(V) > 0\}$, 由于 $N_x(X) = 1$ 可知其非空.

注意此定义不影响对引言中结果的应用且等价于 $(\forall V \in \mathcal{X})(V \in N_o \rightarrow S \subseteq x + V)$.

定义 1.2 $(X, \mathcal{F})$ 是 ftls, 不分明谓词 Bd 和 $BD \in \mathcal{AP}(X)$ 分别称为有界和完全有界, 若 $A \subseteq X$ 时

$$Bd(A) := (\forall V \in \mathcal{X})(V \in N_o \rightarrow (\exists \alpha)(\alpha V \supset A)),$$

$$BD(A) := (\forall V \in \mathcal{X})(V \in N_o \rightarrow V \in \omega(A)).$$

其中 $\omega(A) \triangleq \{V \subseteq X: \text{存在有限 } \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots, \mathfrak{B}_n \in A, A \subseteq \bigcup_{i=1}^n (\mathfrak{A} + V)\}$.

命题 1.3 设 $(X, \mathcal{F})$ 是 ftls, $A \subseteq X$, 则

$$\models BD(A) \rightarrow Bd(A).$$

证明: 要证 $\inf\{1 - N_0(V): V \in \mathcal{X} \text{ 且 } V \not\subseteq \omega(A)\} \leq$

$$\inf_{V \in \mathcal{X}} \min(1 - N_0(V) + \sup_{\alpha \in K} [\alpha V \supset A], 1),$$

设 $[BD(A)] > t$. 对任意 $V \in \mathcal{X}$ 则任意 $\varepsilon > 0$, 据定理 3 存在 U_2 和 U_1 使 $U_2 + U_2 \subseteq U_1 \subseteq U_1 \subseteq V$ 且 $\mathcal{B}(U_2) \geq \mathcal{B}(U_1) > N_0(V) - \varepsilon$, 同时 $[B(U_2)] = 1$; 两种情况: 1°, $U_2 \in \omega(A)$ 是经典结论, 自然成立; 2°, $U_2 \not\subseteq \omega(A)$ 时,

$$\begin{aligned} 1 - N_0(V) + \sup_{\alpha \in K} [\alpha V \supset A] &\geq 1 - N_0(V) \geq 1 - \mathcal{B}(U_2) - \varepsilon \\ &\geq 1 - N_0(U_2) - \varepsilon \geq 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

由 ε 的任意性和结论成立.

由定义 1.2 易知:

①任意有限点集 $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 满足:

$$[Bd(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})] = [BD(\{x_1, x_2, \dots, x_n\})] = 1;$$

② $A_1 \subseteq A_2$ 时, 有 $[Bd(A_2)] \leq [Bd(A_1)]$.

定理 1.3 设 $(X, \mathcal{F})$ 是 ftls, $A \subseteq X$, 特别取定向集(自然数 $<$)则

$$\models Bd(A) \leftrightarrow (\forall S \in N(A)) (S' \in Nck) (S' \triangleright O \rightarrow SS' \triangleright O), \text{ 其中 } SS'(n) = S(n) S'(n).$$

证明: 设 $[Bd(A)] > t$, 对任意 $V \in \mathcal{X}$ 和 $S \in N(A)$ 、 $S' \in N(K)$ 且 $[S' \triangleright O] = 1$, 即, $S'(n) \rightarrow 0$, 由定理 3 不妨设 $[B(V)] = 1$, 设 $SS' \not\subseteq V$, 则 $\sup_{\alpha} [\alpha V \supset A] = 0$, 否则存在 $\alpha, \alpha V \supset A$, 即 $V \supset \frac{1}{\alpha}A$, 又由 $S'(n) \rightarrow 0$ 存在 K' 且 $n \geq K'$ 时 $|S'(n)| \leq \frac{1}{|\alpha|}$, 故上 $[B(V)] = 1$, $n \geq K'$ 时, $S(n) S'(n) \in V$ 矛盾于 $SS' \not\subseteq V$, 所以由假设 $1 - N_0(V) > t$.

反之, 设 $\inf_{S \in N(A)} \inf_{S' \in N(K)} [S' \triangleright O] + [SS' \triangleright O] > t$, 取 $S'(n) = \frac{1}{n}$, 则 $[S' \triangleright O] = 1$ 因而 $\inf_{S \in N(A)} [SS' \triangleright O] > t$, 对任意 $V \in \mathcal{X}$, 取 $\alpha_n = n, x_n \in A \setminus nV$, 则 $\frac{1}{n}x_n \not\subseteq V$, 若令 $S(n) = x_n$, 则 $1 - N_0(V) > t$, 因此 $[Bd(A)] \geq t$, 定理得证.

推论 1.4 设 $(X, \mathcal{F})$ 是 ftls, $A_1, A_2 \subseteq X$, 则

$$\models Bd(A_1) \wedge (Bd)(A_2) \rightarrow Bd(A_1 + A_2) \wedge Bd(A_1 \cup A_2) \wedge (\forall \lambda \in K) (Bd(\lambda A_1)).$$

证明: 设 $[Bd(A_1) \wedge Bd(A_2)] > t$, 则任意 $S_1 \in N(A_1)$, $S_2 \in N(A_2)$, 及 $S' \in N(K)$ 满足

$[S' \triangleright 0] = 1$, 有

$\min([S_1 S' \triangleright 0], [S_2 S' \triangleright 0]) > t$, 断言 $[Bd(A_1 + A_2)] \geq t$: 事实上, 任意 $S \in N(A_1 + A_2)$ 及 $S' \in N(K)$ 且 $[S' \triangleright 0] = 1$, 任意 n , 有 $x_n \in A, y_n \in B$ 使 $s(n) = x_n + y_n$, 令 $S_1(n) = x_n, S_2(n) = y_n$, 则 $S_1 \in N(A_1), S_2 \in N(A_2)$, 且任意 n 有

$$SS'(n) = (S_1 + S_2)S'(n), \text{ 故}$$

$$[SS' \triangleright 0] \geq \min([S_1 S' \triangleright 0], [S_2 S' \triangleright 0]) > t.$$

同理可证其余结论, 此略.

命题 1.5 ($X, \mathcal{F}$ 是 fts, $A_1, A_2 \subset X$, 则

$$\models BD(A_1) \wedge BD(A_2) \rightarrow BD(A_1 + A_2) \wedge BD(A_1 \cup A_2) \wedge (\forall \lambda \in K) BD(\lambda M_1).$$

证明: 设 $[BD(A_1) \wedge BD(A_2)] > t$, 往证 $[BD(A_1 + A_2)] > t$. 对任意 $V \in \mathcal{K}$, 任意 $\varepsilon > 0$, 据定理 3 存在 U_1, U_2 使 $U_2 + U_2 \subset U_1 \subset V$, 且 $\mathcal{B}(U_2) \geq \mathcal{B}(U_1) > N_0(V) - \varepsilon > 0$. $V \in \omega(A_1 + A_2)$ 时, 结论成立; 所以我们设 $V \notin \omega(A_1 + A_2)$, 此时由经典推理知 $U_2 \notin \omega(A_1)$ 和 $U_2 \notin \omega(A_2)$ 至少一个成立, 因此有 $1 - N_0(U_2) \geq t$, 因而

$$1 - N_0(V) > 1 - \mathcal{B}(U_2) - \varepsilon \geq 1 - N_0(U_2) - \varepsilon \geq t - \varepsilon, \text{ 既然 } \varepsilon \text{ 是任意的, 故}$$

$$[BD(A_1 + A_2)] = \inf\{1 - N_0(V) : V \in \mathcal{K} \text{ 且 } V \notin \omega(A_1 + A_2)\} \geq t.$$

同理可证 $[BD(A_1 \cup A_2)] \geq t$ 和 $[BD(\lambda M_1)] \geq t$, 此略.

2 fts 中的紧性^[6]

定义 2.1 设 $(X, \mathcal{F}$ 是 fts, $A \subset X, S \in N(A)$, 称一元模糊谓词 $CN \in \mathcal{A}N(A)$ 为 cauchy 网, 若满足:

$$CN(S) := (\forall \mathcal{K} \in \mathcal{K})(V \in N_0 \rightarrow (S \vec{1} V)),$$

其中 $(S \vec{1} V) \triangleq (\exists \alpha)(\forall \beta_1, \beta_2)((\beta_1 > \alpha) \wedge (\beta_2 > \alpha) \rightarrow (S(\beta_1) \vec{1} S(\beta_2) \in V))$; 另外以下定理 2.2 证明中所用符号 $S \subseteq V$ 表示

$$(\forall \alpha)(\exists \beta)((\beta > \alpha) \wedge (S(\beta) \in V)).$$

定理 2.2 设 $(X, \mathcal{F}$ 是 fts, $A \subset X$, 则

$$\models \Gamma(A) \leftrightarrow BD(A) \wedge (\forall S)(S \in N(A) \rightarrow (CN(S) \rightarrow (\exists x \in A)(S \triangleright x))).$$

证明: 设 $[\Gamma(A)] = \inf_{\mathcal{A}} \min(1 - [K_0(\mathcal{A}A)] + \sup_{\mathcal{B}} [K(\mathcal{B}A)] P[FF(\mathcal{B})], 1) > t$; 对任意 $V \in \mathcal{K}$ 且 $V \vec{1} X(A)$, 任意 $\varepsilon > 0$, 则存在 $W \subset V$, 使 $\mathcal{B}(W) > N_0(V) - \varepsilon > 0$. 令 $\mathcal{A}(U) = \begin{cases} 1 & \text{存在 } x \in A, \text{ 使 } U = x + W; \\ 0 & \text{否则} \end{cases}$ 则有 $[K_0(\mathcal{A}A)] = [K(\mathcal{A}A)] P[\mathcal{A} \subset W] = \inf_{x \in A} \mathcal{F}(x + W) \setminus \mathcal{F}(W) \setminus \mathcal{B}(W)$, 断言 $\sup_{\mathcal{B}} [K(\mathcal{B}A)] P[FF(\mathcal{B})] = 0$; 否则存在 $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$ 使 $[K(\mathcal{D}A)] + [FF(\mathcal{D})] - 1 > 0$ 因而 $[K(\mathcal{D}A)] = 1$ 和 $[FF(\mathcal{D})] = 1$, 即存在 A 中点 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 使得 $A \subset \bigcup_{i=1}^n (x_i + W)$ $\bigcup_{i=1}^n (x_i + V)$. 这矛盾与 $A \vec{1} W(A)$! 因此

$[BD(A)] = \inf\{1 - N_0(V) : V \in \mathcal{K} \text{ 且 } V \vec{1} W(A)\} \setminus t$; 往证 $\inf_{S \in N(A)} \min(1 - [CN(S)] + \sup_{x \in A} [S(x), 1]) \setminus t$. 由定理 2 对任意 $S \in N(A)$, 存在 $T \subset S$ 和 $x_0 \in A$ 使 $[T(x_0)] > t$; 对任意 V

且 $S \leq x_0 + V$, 据定理3, 对任意 ε , 存在 U_1 与 U_2 满足 $U_2 + U_2 < U_1 < V$ 且 $\mathcal{B}(U_2) \setminus \mathcal{B}(U_1) > N_0(V) - \varepsilon > 0$. 若 $T \leq x_0 + U_2$, 则 $1 - N_0(V) + \varepsilon \leq 1 - \mathcal{B}(U_2) \setminus 1 - N_0(U_2) > t$, 即 $1 - N_0(V) > t - \varepsilon$. 若 $T \not\leq x_0 + U_2$, 则 $S \not\leq V$, 这因为 $S \not\leq V$ 和 $T \leq x_0 + U_2$ 时有 $S \wedge x_0 + V$ 矛盾与假设1故

$N_0(U_2) + 1 - N_0(V) \setminus N_0(V) - \varepsilon + 1 - N_0(V) = 1 - \varepsilon$, 因此

$$\inf_{S \in N(A)} \left(\sup_{V \in \mathcal{V}_0} N_0(V) + \sup_{x \in A} [S \wedge x] \right) \setminus t.$$

另一方面, 设 $(\) [BD(A)] > t$ 和 $(\) [(PSIN(A))(CN(S) \vee (v \wedge x \wedge I(A)(s \wedge x)))] > t$, 由定理2只要证明 $[(PSIN(A))(v \wedge TIN(A))(v \wedge x \wedge I(A)((T < S) + (T \wedge x)))] \setminus t$. 任取 $S \in N(A)$, 设 $S: (D, <) \vee A$, 令

$$\mathcal{M} = \{ \mathcal{H} \in \mathcal{H}(A) \text{ 且 } \text{supp } \mathcal{H} \subseteq \mathcal{D} \} \text{ 时, } S \wedge H \mathcal{H},$$

在 $\mathcal{M}$ 中规定 $\mathcal{H} < \mathcal{H}'$ 当 $\mathcal{H} < \mathcal{H}'$ 则 由 Zorn 引理知 $\mathcal{M}$ 有极大元 $\mathcal{H}$ 且满足: $A \in \mathcal{H} \setminus E_1, E_2, \dots, E_n \in \mathcal{H}$ 时, $\bigcup_{i=1}^n E_i \in \mathcal{H}$ 时, 存在 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ 使 $E_i \in \mathcal{H}$

现取 $\mathcal{U} = \{(E, A): E \in \mathcal{H}, A \in D \text{ 使 } S(A) \in E\}$, 规定 $(E, A_1) < (E_2, A_2) \iff E_2 < E_1$ 且 $A_1 < A_2$, 则易知 $(\mathcal{U}, <)$ 是定向集. 取 $T: (U, <) \vee A$, $T(E, A) = S(A)$ 易知 $T \in N(A)$ 且 $T < S$. 往证 $\sup_{x \in A} [T \wedge x] \setminus t$: 任取 $V \in \mathcal{V}$ 任意 $\varepsilon > 0$, 据定理3存在 U 使 $U + U < V$ 且 $[B(U)] = 1$ 和 $\mathcal{B}(U) > N_0(V) - \varepsilon > 0$. 因为 $\inf\{1 - N_0(V): V \in \mathcal{V} \text{ 且 } V \cap \overline{X(A)} = [BD(A)] > t\}$, 我们考虑两种情况:

1b, $U \cap \overline{X(A)} = \emptyset$ 则 $1 - N_0(U) \setminus t$, 因而有

$1 - N_0(V) > 1 - \mathcal{B}(U) - \varepsilon \leq 1 - N_0(U) - \varepsilon \leq t - \varepsilon$, 由 ε 的任意性知

$$\sup_{x \in A} [T \wedge x] \setminus [T \wedge 0] = \inf\{1 - N_0(V): V \in \mathcal{V}_0 \text{ 且 } T \wedge V \setminus t\},$$

2b, $U \cap \overline{X(A)} \neq \emptyset$, 则有 $\{i_1, i_2, \dots, i_n\} < A$ 使

$$A < \bigcup_{i=1}^n E_{i_0} \in \mathcal{H}, \text{ 断言存在 } i_0 \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ 使 } S \leq E_{i_0} \text{ 且 } E_{i_0} \in \mathcal{H}$$

事实上, 设 $\{i_0, i_1, \dots, i_k\} < \{1, 2, \dots, n\}$, $i_j (j = 0, 1, \dots, k)$ 是其中满足 $S \leq E_{i_j}$ 的 E_{i_j} , 则存在 $A \in D$, 当 $B > A$ 时有 $A \wedge H\{S(B): B > A\} = (\bigcup_{j=0}^k E_{i_j}) \wedge H\{S(B): B > A\} \in (\bigcup_{j=0}^k E_{i_j}) \in \mathcal{H}$ 则任取 $F_1, F_2, \dots, F_m \in \mathcal{H}$ 有

$$\begin{aligned} (\bigcup_{i=1}^m F_i) \wedge H\{S(B): B > A\} &= (\bigcup_{i=1}^m F_i) \wedge A \wedge H\{S(B): B > A\} \\ &= (\bigcup_{i=1}^m F_i) \wedge (\bigcup_{j=0}^k E_{i_j}) \wedge H\{S(B): B > A\}. \end{aligned}$$

可见 $\mathcal{H} \cap \{\bigcup_{j=0}^k E_{i_j}\} \in \mathcal{H}$ 矛盾与 $\mathcal{H}$ 的极大元性! 因此, 存在 $(E_{i_0}, A) \in \mathcal{U}$ 对 (E_c, A_c) 与 $(E_d, A_d) \in \mathcal{U}$ 且 (E_c, A_c) 与 $(E_d, A_d) > (E_{i_0}, A)$ 时, 有

$T(E_c, A_c) - T(E_d, A_d) = S(A_c) - S(A_d) \in E_c - E_d < E_{i_0} - E_{i_0} < (E_{i_0} + U) - (E_{i_0} + U) < U - U < U + U < V$, 因此 $T \not\leq V$; 既然 $V \in \mathcal{V}$ 是任意的, 据()知 $\sup_{x \in A} [T \wedge x] \setminus t$, 这样我们完成了定理的全部证明1

参 考 文 献

- 1 Zadeh L. A1 Fuzzy Sets. Inf. Control. 1965, (8): 338~ 353
- 2 王国俊 1 L- fuzzy 拓扑空间论 1 西安: 陕西师范大学出版社, 1988 1244~ 303
- 3 Ying M. SI Compactness in fuzzifying topology. Fuzzy Sets and Systems. 1993, (55): 79~ 92
- 4 吴从炘, 方锦喧 1 有界性与局部有界的 Fuzzy 拓扑线性空间 1 模糊数学, 1985, 5(4): 80~ 89
- 5 邱道文 1 不分明化拓扑线性空间() 1 广东工学院学报(自), 1996, 13(1): 28~ 34
- 6 Schaefer H H. Topological Vector Spaces. New York: Springer- Verlag, 1971 125~ 33

Fuzziifying Topological Linear Spaces ()

Qiu Daowen

Dept. of Mathematics and Physics, GDUT, Guangzhou, 510090

Abstract Several concepts such as boundedness, complete boundedness and compactness are introduced. An equivalent theorem of compactness is given, which shows that a set A is compact iff A completely bounded and complete.

Key words fuzzifying linear topology; complete boundedness; compactness

(上接第 69 页)

The Characteristics of the Nonempty Class $u_2(R, S)$

Hou Sumei

Dept. of Mathematics and Physics, GDUT, Guangzhou, 510090

Abstract Let $u_2(R, S)$ be the class of all $(0, 1, 2)$ -matrices with a prescribed row sum vector R and column sum vector S , the relationship between the vector R and the vector S of the nonempty class $u_2(R, S)$ are studied.

Key words $(0, 1, 2)$ -matrix; $u_2(R, S)$; structure matrix; irreducible matrix